УДК 621.762.4

Ю. Н. ЛОГИНОВ
(Уральский политехнический институт)

ФОРМОИЗМЕНЕНИЕ ПОРИСТОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ОСАДКЕ

Для осадки цилиндрических заготовок умеренной высоты, т. е. при отношении высоты к диаметру в пределах 0,3 ... 2,0, характерно наличие одинарного бочкообразования. В этом случае при деформации сухими шероховатыми плитами практически вся контактная поверхность представляет собой зону прилипания [1].

В работе [1] рассмотрена задача осадки цилиндра из компактного материала при наличии полного прилипания металла на контактной поверхности. При расположении цилиндра в цилиндрической системе координат (рис. 1) и удовлетворении граничных условий

$$v_z|_{z=\pm h} = \mp v;\ v_r|_{r=0} = 0;\ v_r|_{z=\pm h} = 0; \tag{1}$$

кинематически возможное поле скоростей формулировалось в виде

$$v_r = \frac{3}{4} v \frac{r}{h}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right); \tag{2}$$

$$v_z = -\frac{3}{2} v \frac{z}{h}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{z^2}{h^2}\right), \tag{3}$$

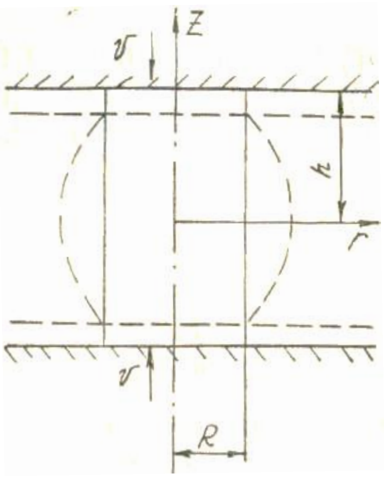

Рис. 1. Схема очага деформации

где r, z — текущие координаты; v — скорость перемещения инструмента; v_r и v_z — проекции скорости перемещения частиц материала на соответствующие оси; h — половина высоты цилиндра.

Формула (2) была сконструирована в предположении, что боковая поверхность деформируемого цилиндра приобретает бочкообразный вид и описывается уравнением параболы. Уравнения (2) и (3) удовлетворяют условию несжимаемости

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

Сформулируем поле скоростей для случая осадки цилиндра из сжимаемого материала с учетом следующих требований. Естественно, что условие (4) при деформации сжимаемого материала должно выполняться лишь в частном случае, когда материал уплотнится в результате деформации настолько, что потеряет способность к дальнейшему объемному сжатию, т. е. плотность цилиндра достигнет плотности компактного материала. По сравнению с течением цилиндра из компактного материала течение пористого цилиндра, видимо, может сопровождаться меньшим бочкообразованием благодаря возможности затекания металла в поры. Поскольку форму бочки на боковой поверхности цилиндра описывает формула (2), внесем в нее коррективы, введя дополнительное слагаемое, включающее варьируемый параметр a:

$$v_r = \frac{3}{4} v \frac{r}{h}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) + va\frac{z}{h}. \tag{5}$$

Параметр a может равняться нулю, в этом случае формула (5) описывает осадку цилиндра из несжимаемого материала, выполняется условие (4), и уравнение (5) превращается в уравнение (2). Объем цилиндра при осадке уменьшается либо остается постоянным, поэтому скорость течения пористого материала в радиальном направлении не может превысить ту же скорость при течении компактного материала; отсюда область определения варьируемого параметра $a \le 0$. Для определения v_z воспользуемся формулой (3). Применив кинематические соотношения Коши, получим поле скоростей деформации

$$\xi_{\varphi\varphi} = \xi_{rr} = \frac{3}{4}\frac{v}{h}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) + \frac{v}{h}a; \qquad \xi_{zz} = -\frac{3}{2}\frac{v}{h}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right);$$

$$\xi_{rz} = -\frac{3}{4}v\frac{rz}{h^3}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right), \tag{6}$$

а также интенсивность скоростей деформации сдвига

$$H = 2\sqrt{\frac{1}{3}(\xi_{rr} - \xi_{zz})^2 + \xi_{rz}^2} =$$

$$= 2\frac{v}{h}\sqrt{\frac{1}{3}\left[\frac{9}{4}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) + a\right]^2 + \frac{9}{16}\,\frac{r^2z^2{}^2}{h^4}} \tag{7}$$

и скорость изменения объема

$$\xi = \frac{v}{h}a. \tag{8}$$

Запишем функционал вариационного принципа виртуальных скоростей [2] при варьировании только деформированного состояния для случая медленного пластического течения сжимаемой среды, обладающей жестко-пластическими свойствами при отсутствии трения на контактной поверхности:

$$I = \int_V (TH' + \sigma\xi')\,dV\,, \tag{9}$$

где V — объем деформируемого тела; T и σ — интенсивность касательных напряжений и гидростатическое напряжение при пластическом изменении формы и объема, штрихами обозначены варьируемые величины.

Для выполнения условия существования решения σ и ξ должны иметь одинаковые знаки, т. е. sign σ = sign ξ при выполнении вычислений удобнее брать второе произведение в круглых скобках формулы (9) по модулю.

Допустим, что механические свойства материала однородны в объеме заготовки; вынесем T из-под знака интеграла и подставим в (9) значения H и ξ из формул (7) и (8); после преобразований получим

$$I = 4\pi T \frac{v}{h} \int_0^R \int_0^h 2\sqrt{\frac{1}{3}\left[\frac{9}{4}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) + a\right]^2 + \frac{9}{16}\frac{r^2 z^2}{h^4}} rdrdz + $$

$$+ \left|\frac{\sigma}{T} a \frac{R^2}{2}\right| h, \tag{10}$$

где R — радиус цилиндра.

Варьируемый параметр a найдем из условия минимума функционала (10):

$$\frac{\partial}{\partial a}\left\{\int_0^R \int_0^h 2\sqrt{\frac{1}{3}\left[\frac{9}{4}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) + a\right]^2 + \frac{9}{16}\frac{r^2 z^2}{h^4}} rdrdz + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{\sigma}{T} a \frac{R^2}{2}\right| h. \right. \tag{11}$$

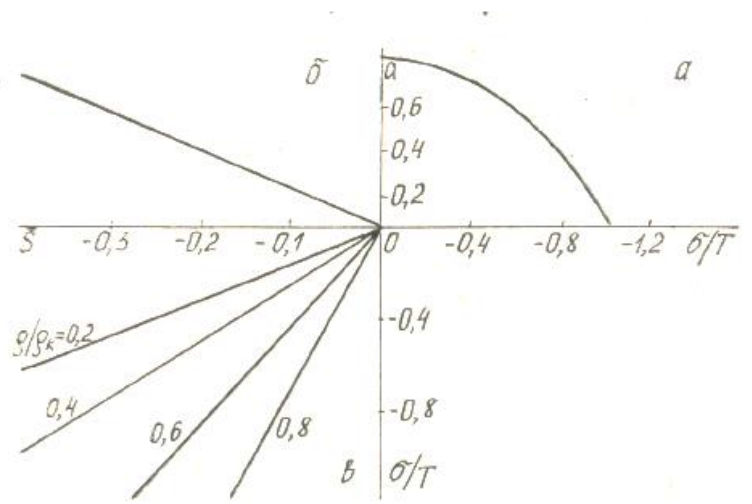

Рис. 2. Номограмма к определению варьируемого параметра

Численное решение уравнения (11) показало слабую зависимость параметра a от отношения R/h, поэтому на графике рис. 2, ***а*** оно приведено в виде функции $a = f\left(\frac{\sigma}{T}\right)$. Видно, что при малых значениях a, характерных для невысоких плотностей, параметр a отличен от нуля, что вызывает существенное изменение распределения скоростей и деформаций по сравнению с деформацией цилиндра из компактного материала. При больших a, необходимых для деформации материала с плотностью, близкой к плотности компактного материала, параметр a равен нулю и решение задачи сводится к известному решению задачи деформации сплошного цилиндра.

Отношение $\frac{\sigma}{T}$ в уравнении (11) определим из следующих условий. В монографии [3] было высказано предположение, что одним из параметров, влияющих на вид зависимостей T и σ от термомеханических параметров процесса для сжимаемых сред, является скорость дилатансии $S = \xi/H$. Это предположение было подтверждено экспериментально в работе [4], в которой для записи физических уравнений связи напряжений и деформаций было использовано отношение приращения степени деформации сдвига к приращению степени деформации объема обратное по величине скорости дилатансии S, причем было предложено следующее граничное условие при формулировке физического уравнения для гидростатического напряжения:

при $\frac{d\Lambda}{d\varepsilon} = -2\sqrt{3} \approx -1{,}15$ или $S = \sqrt{3}/2$

$$\sigma = -mT/\sqrt{3} \tag{12}$$

где

$$m = \frac{1+2(\frac{c\rho}{\rho_k}+d)}{1-(\frac{c\rho}{\rho_k}+d)}; \tag{13}$$

c и d — эмпирические коэффициенты, зависящие от природы некомпактного материала; ρ и ρ_k — текущая плотность и плотность компактного материала.

Второе граничное условие при формулировке физического уравнения для гидростатического напряжения сконструируем так:

при $S = 0$

$$\sigma = 0, \tag{14}$$

т. е. при отсутствии гидростатического напряжения объемные деформации отсутствуют.

Граничным условиям (12) и (14) удовлетворяет следующее уравнение, линейное относительно скорости дилатансии:

$$\sigma = +\frac{2}{3}T\frac{1+2(\frac{c\rho}{\rho_k}+d)}{1-(\frac{c\rho}{\rho_k}+d)}\ . \tag{15}$$

На рис. 2, *в* изображены зависимости $\frac{\sigma}{T} = f\left(\frac{\rho}{\rho_k}, S\right)$ для некомпактного материала, полученного из порошка ПМС1 при значениях эмпирических коэффициентов c =0,35; d = 0,22.

Выразим величину $\frac{d\Lambda}{d\varepsilon}$ через скорость дилатансии

$$\frac{d\Lambda}{d\varepsilon} = \frac{1}{S} = H/\xi\,, \tag{16}$$

после подстановки H и ξ I из формул (7) и (8) получим

$$\frac{d\Lambda}{d\varepsilon} = \frac{1}{S} = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{1}{3}\left[\frac{9}{4}\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)+a\right]^2+\frac{9}{16}\ \frac{r^2z^{2^2}}{h^4}}\ . \tag{17}$$

Оценим среднюю по объему величину $^{d\Lambda}/_{d\varepsilon}$, воспользовавшись теоремой о среднем значении интеграла:

$$\overline{\frac{d\Lambda}{d\varepsilon}} = \frac{1}{S} = \frac{1}{R^2h}\int_0^R\int_0^h \frac{2}{a}\sqrt{\frac{1}{3}\left[\frac{9}{4}\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)+a\right]^2+\frac{9}{16}\frac{r^2z^2}{h^4}}\,rdrdz =$$

$$= \frac{3}{8a}\sqrt{27+16a+\frac{256}{27}a^2+\frac{R^2}{h^2}}\,. \qquad (18)$$

Параметр R/h слабо влияет на значения функции (18), поэтому на рис. 2, *б* приведена зависимость скорости дилатансии, средней по объему очага деформации, только от параметра a.

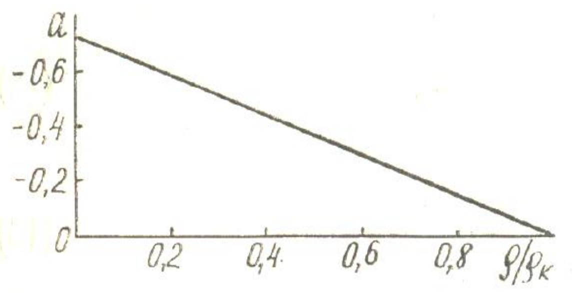

Рис. 3. Зависимость варьируемого параметра от относительной плотности материала

Задача может быть решена совместным решением уравнений (11), (15) и (18), что можно осуществить методом последовательных приближений с помощью номограммы рис. 2. По номограмме подбирается такое значение параметра a при данной величине ρ/ρ_k, которое приводит к получению одинаковых значений σ/T при переходе по квадрантам как по часовой, так и против часовой стрелки. На рис. 3 приведено окончательное решение задачи в виде графика $a = f(\rho/\rho_k)$. Видно, что сжимаемость цилиндра, численно характеризуемая величиной a максимальна при малых плотностях и становится равной нулю при достижении плотности компактного материала. С использованием этого графика и формулы (5) можно определить форму боковой поверхности цилиндра при любой исходной плотности деформируемого материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория обработки металлов давлением/Тарновский И. Я., Поздеев А. А., Ганаго О.А. и др. Под ред.И. Я. Тарновского. – М.: Металлургиздат, 1963. – 632 с.
2. Теория пластических деформаций металлов /Унксов Е. П. Джонсон У., Колмогоров В. Л. и др. Под ред. Е. П. Унксова, А. Г. Овчинникова. – М.: Машиностроение, 1983. —598 с.
3. Феноменологические теории прессования порошков /Штерн М. Б., Сердюк Г. Г., Максименко Л. А. и др. – Киев : Наукова думка. 1982. 140 с.
4. О гипотезе единой кривой для некомпактных сред / /Колмогоров В. Л., Логинов Ю. Н., Паршаков С. И., Шилов С. В. — В кн.: Обработка металлов давлением. Свердловск: изд. УПИ им. С. М. Кирова, с. 47…50 (Межвуз. сб., вып.8).